

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Н. А. Булгаков

**ОСНОВНЫЕ
ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ
ПО МАТЕМАТИКЕ
И ФИЗИКЕ**



**ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ФИЗИКА**



СПРАВОЧНИК

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

Н. А. Булгаков

ОСНОВНЫЕ

**ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ
ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ**

**ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Ф И З И К А**

СПРАВОЧНИК

Тамбов

• Издательство ТГТУ •
2002

УДК 531(075)
ББК В3я73
Б90

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор
кафедры "Приемные и передающие радиоустройства" ТВАИИ,
заслуженный работник высшей школы РФ
Д. Д. Дмитриев

Кандидат технических наук, профессор кафедры "Физика" ТВАИИ
В. С. Макаров

Булгаков Н. А.
Б90 Основные законы и формулы по математике и
физике: Справочник. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн.
ун-та, 2002. 72 с.

Представлены в сжатой форме основные законы и формулы по всему курсу физики, а также по школьной и высшей математике, знание которых необходимо для решения задач и осмысления физической сущности явлений.

Основное назначение — помочь быстро найти или восстановить в памяти необходимые законы и формулы. Используется современная терминология и обозначения.

Привлекателен в качестве справочного материала при подготовке к семинарским занятиям и экзаменам. Помимо студентов вузов может быть полезен инженерно-техническим работникам и учащимся колледжей и школ.

УДК 531(075)
ББК В3я73

© Тамбовский государственный

технический университет (ТГТУ), 2002

© Н. А. Булгаков, 2002

Справочное издание

БУЛГАКОВ Николай Александрович

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ФИЗИКА

Редактор З. Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

ЛР № 020851 от 27.09.99

П_лр № 020079 от 28.04.97

Подписано в печать 02.03.2002.

Гарнитура Times ET. Формат 60 × 84 / 16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем: 4,2 усл. печ. л.; 4,5 уч.-изд. л.

Тираж 500 экз. С. 151^М

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

● Числовые неравенства:

Если $a > b$, то $b < a$.

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.

Если $a > b > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$.

● Разложение на множители:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2); \quad a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3;$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

● Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ — формула корней квадратного уравнения.}$$

Теорема Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

● Арифметическая прогрессия:

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — члены арифметической прогрессии;

d — разность арифметической прогрессии;

$a_{n+1} = a_n + d$ — определение арифметической прогрессии;

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ — формула n -го члена;

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ — характеристическое свойство;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n$ — формула суммы n первых членов.

- Геометрическая прогрессия:

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — члены геометрической прогрессии;

q — знаменатель геометрической прогрессии;

$b_{n+1} = bq$, $b \neq 0, q \neq 0$ — определение геометрической прогрессии;

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — формула n -го члена;

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ — характеристическое свойство;

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$ — формула суммы n первых членов;

$S = \frac{b_1}{1 - q}$ — формула суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

- Свойства тригонометрических функций:

$$\sin(-x) = -\sin x;$$

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x;$$

$$\cos(-x) = \cos x;$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x;$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x,$$

где k — любое целое число.

- Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Аргумент α						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Примечание. Связь между градусной и радианной мерами измерения угла:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

- Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

- Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

- Формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

- Формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

- Формулы сложения и вычитания аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

- Формулы сложения и вычитания тригонометрических функций:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

- Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

- Знаки тригонометрических функций по четвертям

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

- Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

- Решение простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a, \quad |a| \leq 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$$

$$\cos x = a, \quad |a| \leq 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n;$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \text{ — целое число.}$$

- Обратные тригонометрические функции:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi;$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Обозначения: a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$, h — высота, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей.

- Теорема синусов. В любом треугольнике

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

- Теорема косинусов. В любом треугольнике

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha .$$

- Формулы площади любого треугольника:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — формула Герона.}$$

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

□ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

□ $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ — координаты точки, делящей отрезок с концами $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в отношении $\lambda = |M_1M| : |MM_2|$.

□ $Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой (A, B, C — любые вещественные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$).

□ $y = kx + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k (b — величина отрезка, отсекаемого прямой по оси Oy).

□ $y - y_1 = k(x - x_1)$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$.

□ $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ — уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

□ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в отрезках (a, b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy).

□ $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

□ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ — формула вычисления одного из углов между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

□ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение эллипса (a, b — полуоси).

□ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение гиперболы.

□ $y^2 = 2px, y^2 = -2px$ — каноническое уравнение параболы с осью симметрии Ox ($p > 0$ — параметр).

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

□ $X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$ — выражение координат вектора $\overline{AB}$ через координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

□ $|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ — выражение длины вектора $\vec{a} = \{X; Y; Z\}$ через его координаты.

□ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ — расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

□ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ — определение скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (φ — угол между векторами).

□ $\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$ — выражение скалярного произведения векторов $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ через их координаты.

□ $\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$ — выражение угла между векторами.

□ $Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение плоскости (A, B, C — любые вещественные числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

□ $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2}$ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

□ $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ — каноническое уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a} = \{l; m; n\}$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

□ $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$ — параметрические уравнения прямой.

□ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — каноническое уравнение эллипсоида (a, b, c — полуоси).

□ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — каноническое уравнение однополосного гиперboloида.

□ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — каноническое уравнение двуполосного гиперboloида.

□ $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ — каноническое уравнение эллиптического параболоида ($p > 0, q > 0$ — параметры).

□ $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$ — каноническое уравнение гиперболического параболоида.

□ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — каноническое уравнение конуса второго порядка

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

□ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ — первый замечательный предел.

□ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ — второй замечательный предел.

□ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ — определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

□ $dy = f'(x_0)dx$ — дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 .

□ Производные простейших элементарных функций:

♦ Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 2) (uv)' = u'v + uv'; \quad 3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

♦ Производная постоянной функции

$$y = f(x) = C \Rightarrow y' = 0,$$

$$(Cu)' = Cu'.$$

♦ Производная степенной функции

$$(x^n)' = nx^{n-1}; \quad (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}.$$

♦ Производная показательной функции

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x.$$

♦ Производная логарифмической функции

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

□ Производные тригонометрических функций:

$(\sin x)' = \cos x;$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\cos x)' = -\sin x;$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x;$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x;$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

□ $y'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$ — правило дифференцирования сложной функции $y = f[\varphi(t)]$ в точке t_0 ; здесь $x_0 = \varphi(t_0)$.

□ $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ — правило дифференцирования обратной функции $x = \varphi(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$.

□ $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}$ — формула Лейбница.

□ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ — формула Лагранжа; $c \in (a, b)$.

□ $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ — формула Коши; $c \in (a, b)$.

□ $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ — формула Тейлора; $\xi \in (a, x)$.

□ При $a = 0$ получаем формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{(n)} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{(n+1)}.$$

□ Неопределенный и определенный интегралы

◆ Табличные интегралы:

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1);$	$\int e^x dx = e^x + C;$
$\int \sin x dx = -\cos x + C;$	$\int \cos x dx = \sin x + C;$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$
$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C \quad (a \neq 0);$	$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C;$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$	$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm k} \right + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right + C.$

◆ $\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$ — формула замены переменной в неопределенном интеграле.

◆ $\int_a^b f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ — формула замены переменной в определенном интеграле; $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

◆ $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ — формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

◆ $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ — формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

□ $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ — формула среднего значения; $c \in [a, b]$.

□ $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ — формула Ньютона-Лейбница.

● $s = \int_a^b f(x)dx$ — площадь криволинейной трапеции

$$0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b.$$

□ $s = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$ — площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

□ $s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$ — площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

□ $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ — длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

□ $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ — длина дуги кривой, заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

□ $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$ — длина дуги кривой, заданной в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

□ $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ — объем тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$.

□ $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ — площадь поверхности вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Ф И З И К А

I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

□ Средняя и мгновенная скорости материальной точки

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где $\Delta \mathbf{r}$ — элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt ; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки; Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt .

□ Среднее и мгновенное ускорения материальной точки

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

□ Полное ускорение при криволинейном движении

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ — тангенциальная составляющая ускорения; $a_n = \frac{v^2}{r}$ — нормальная составляющая ускорения (r — радиус кривизны траектории в данной точке).

□ Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2};$$

$$v = v_0 \pm at,$$

где v_0 — начальная скорость.

□ Угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

□ Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

□ Угловая скорость для равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

где T — период вращения; n — частота вращения ($n = N/t$, где N — число оборотов, совершаемых телом за время t).

□ Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

□ Связь между линейными и угловыми величинами

$$s = R\varphi; \quad v = R\omega; \quad a_\tau = R\varepsilon; \quad a_n = \omega^2 R,$$

где R — расстояние от оси вращения.

1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

□ Импульс (количество движения) материальной точки

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

□ Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

□ Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}; \quad F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

□ Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления.

□ Сила трения качения

$$F_{\text{тр}} = f_k N / r,$$

где f — коэффициент трения качения; r — радиус качающегося тела.

□ Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{const},$$

где n — число материальных точек (или тел), входящих в систему.

□ Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

где m_i — масса i -й материальной точки; x_C, y_C, z_C — ее координаты.

□ Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_p,$$

где реактивная сила $\mathbf{F}_p = -\mathbf{u} \frac{dm}{dt}$ ($\mathbf{u}$ — скорость истечения газов из ракеты).

□ Формула Циолковского для определения скорости ракеты

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \ln \frac{m_0}{m},$$

где m_0 — начальная масса ракеты.

1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

□ Работа, совершаемая постоянной силой

$$dA = F_s ds = F ds \cos \alpha ,$$

где F_s — проекция силы на направление перемещения; α — угол между направлениями силы и перемещения.

□ Работа, совершаемая переменной силой, на пути s

$$A = \int_s F_s ds = \int_s F \cos \alpha ds .$$

□ Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N \rangle = \Delta A / \Delta t .$$

□ Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} , \text{ или } N = \mathbf{Fv} = F_s v = Fv \cos \alpha .$$

$$\Pi = mgh ,$$

где g — ускорение свободного падения.

□ Сила упругости

$$F = -kx ,$$

где x — деформация; k — коэффициент упругости.

□ Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = kx^2 / 2 .$$

□ Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \text{const} .$$

□ Коэффициент восстановления

$$\varepsilon = v'_n / v_n ,$$

где v'_n и v_n — соответственно нормальные составляющие относительной скорости тел после и до удара.

□ Скорости двух тел массами m_1 и m_2 после абсолютно упругого центрального удара:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} ;$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} ,$$

где v_1 и v_2 — скорости тел до удара.

□ Скорость движения тел после абсолютно неупругого центрального удара

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} .$$

1.4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

□ Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2,$$

где m — масса точки; r — расстояние до оси вращения.

□ Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где r_i — расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс $J = \int r^2 dm$.

□ Моменты инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными; m — масса тела):

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный ци-линдр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

□ Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2,$$

где J_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J — момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a ; m — масса тела.

□ Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z ,

$$T_{\text{вр.}} = J_z \omega^2 / 2,$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси z ; ω — его угловая скорость.

□ Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C \omega^2,$$

где m — масса тела; v_C — скорость центра масс тела; J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела.

□ Момент силы относительно неподвижной точки

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\mathbf{F}$.

□ Модуль момента силы

$$M = Fl,$$

где lj — плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

□ Работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ — угол поворота тела; M_z — момент силы относительно оси z .

□ Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно оси вращения

$$L_z = \sum m_i v_i r_i = J_z \omega,$$

где r_i — расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i v_i$ — импульс этой частицы; J_z — момент инерции тела относительно оси z ; ω — его угловая скорость.

□ Уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}; \quad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение; J_z — момент инерции тела относительно оси z .

□ Закон сохранения момента импульса (момента количества движения) для замкнутой системы

$$\mathbf{L} = \text{const.}$$

□ Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = F/S,$$

где F — растягивающая (сжимающая) сила; S — площадь поперечного сечения.

□ Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \Delta l/l,$$

где Δl — изменение длины тела при растяжении (сжатии); l — длина тела до деформации.

□ Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \Delta d/d,$$

где Δd — изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d — диаметр стержня.

□ Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε

$$\varepsilon' = \mu \varepsilon,$$

□ Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где E — модуль Юнга.

□ Потенциальная энергия упругорастянутого (сжатого) стержня

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} F dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2} V,$$

где V — объем тела.

1.5. ТЯГОТЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

□ Третий закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 — периоды обращения планет вокруг Солнца; R_1 и R_2 — большие полуоси их орбит.

□ Закон всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F — сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух материальных точек массами m_1 и m_2 , r — расстояние между точками; G — гравитационная постоянная.

□ Сила тяжести

$$P = mg,$$

где m — масса тела; g — ускорение свободного падения.

□ Напряженность поля тяготения

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} / m,$$

где $\mathbf{F}$ — сила тяготения, действующая на материальную точку массой m , помещенную в данную точку поля.

□ Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -Gm_1 m_2 / r.$$

□ Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \Pi / m,$$

где Π — потенциальная энергия материальной точки массой m , помещенной в данную точку поля.

□ Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей.

□ Первая и вторая космические скорости

$$v_1 = \sqrt{gR_0}, \quad v_2 = \sqrt{2gR_0},$$

где R_0 — радиус Земли.

□ Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} + \mathbf{F}_{\text{ин.}},$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ — соответственно ускорение тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, $\mathbf{F}_{ин.}$ — силы инерции.

□ Силы инерции

$$\mathbf{F}_{ин.} = \mathbf{F}_и + \mathbf{F}_ц + \mathbf{F}_к ,$$

где $\mathbf{F}_и$, — силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением a_0 : $F_{и} = -ma_0$; $F_{ц}$ — центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R): $F_{ц} = -m\omega^2 R$; F_k — кориолисова сила инерции (силы инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью v' во вращающейся системе отсчета:

$$\mathbf{F}_k = 2m[\mathbf{v}'\omega]$$

1.6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

□ Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho gh ,$$

где ρ — плотность жидкости.

□ Закон Архимеда

$$F_A = \rho g V ,$$

где F_A — выталкивающая сила; V — объем вытесненной жидкости.

□ Уравнение неразрывности

$$Sv = \text{const} ,$$

где S — площадь поперечного сечения трубки тока; v — скорость жидкости.

□ Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const} ,$$

где p — статическое давление жидкости для определенного сечения трубки тока; v — скорость жидкости для этого же сечения; $\rho v^2 / 2$ — динамическое давление жидкости для этого же сечения; h — высота, на которой расположено сечение; ρgh — гидростатическое давление.

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} .$$

□ Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде,

$$v = \sqrt{2gh} ,$$

где h — глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

□ Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S ,$$

где η — динамическая вязкость жидкости; $\Delta v / \Delta x$ — градиент скорости; S — площадь соприкасающихся слоев.

□ Число Рейнольдса, определяющее характер движения жидкости,

$$Re = \rho < v > d / \eta ,$$

где ρ — плотность жидкости; $< v >$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — характерный линейный размер, например диаметр трубы.

□ Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик,

$$F = 6\pi\eta r v ,$$

где r — радиус шарика; v — его скорость.

□ Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l ,

$$V = \pi R^4 \Delta p t / (8\eta l) ,$$

где R — радиус трубки; Δp — разность давлений на концах трубки.

□ Лобовое сопротивление

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S ,$$

где C_x — безразмерный коэффициент сопротивления; ρ — плотность среды; v — скорость движения тела; S — площадь наибольшего поперечного сечения тела.

□ Подъемная сила

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S ,$$

где C_y — безразмерный коэффициент подъемной силы

1.7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ (ЧАСТНОЙ) ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

□ Преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K , причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y , z' и z — параллельны; c — скорость распространения света в вакууме.

□ Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

где τ — промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами; τ' — промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами.

□ Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} ,$$

где l_0 — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v .

□ Релятивистский закон сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x / c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - vu_x / c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - vu_x / c^2},$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K , причем оси x' и x совпадают, оси y' и y , z' и z — параллельны.

□ Интервал s_{12} между событиями (инвариантная величина)

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv},$$

где t_{12} — промежуток времени между событиями 1 и 2; l_{12} — расстояние между точками, где произошли события.

□ Масса релятивистской частицы и релятивистский импульс

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

где m_0 — масса покоя.

□ Основной закон релятивистской динамики

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где $\mathbf{p}$ — релятивистский импульс частицы.

□ Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T, \quad T = (m - m_0) c^2.$$

□ Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}.$$

□ Энергия связи системы

$$E_{\text{св.}} = \sum_{i=1}^n m_{0i} c^2 - M_0 c^2,$$

где m_{0i} — масса покоя i -й частицы в свободном состоянии; M_0 — масса покоя системы, состоящей из n частиц.

II. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И

ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

□ Закон Бойля-Мариотта

$$pV = \text{const при } T = \text{const}, m = \text{const},$$

где p — давление; V — объем; T — термодинамическая температура; m — масса газа.

□ Закон Гей-Люссака

$$V = V_0(1 + \alpha t), \text{ или } V_1 / V_2 = T_1 / T_2 \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const};$$
$$p = p_0(1 + \alpha t), \text{ или } p_1 / p_2 = T_1 / T_2 \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const},$$

где t — температура по шкале Цельсия; V_0 и p_0 — соответственно объем и давление при 0°C ; коэффициент $\alpha = 1/273 \text{ K}^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям.

□ Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p = \sum_{i=1}^n p_i,$$

где p_i — парциальное давление i -го компонента смеси.

□ Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)

$$pV_m = RT \text{ (для одного моля газа),}$$
$$pV = (m/M)RT \text{ (для произвольной массы газа),}$$

где V_m — молярный объем; R — молярная газовая постоянная; M — молярная масса газа; m — масса газа; $m/M = \nu$ — количество вещества.

□ Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры

$$p = nkT,$$

где k — постоянная Больцмана ($k = R / N_A$, N_A — постоянная Авогадро).

□ Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2,$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \left(\frac{m_0 \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2}{2} \right) = \frac{2}{3} E,$$

или

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2,$$

где $\langle v_{\text{кв.}} \rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул; E — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n — концентрация молекул, m_0 — масса одной молекулы; $m = N m_0$ — масса газа; N — число молекул в объеме газа V .

□ Скорость молекул:

◆ наиболее вероятная

$$v_{\text{в.}} = \sqrt{2RT / M} = \sqrt{2kT / m_0};$$

◆ средняя квадратичная

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{3RT / M} = \sqrt{3kT / m_0};$$

◆ средняя арифметическая

$$v = \sqrt{8RT / (\pi M)} = \sqrt{8kT / (\pi m_0)},$$

где m_0 — масса одной молекулы.

□ Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

□ Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)},$$

где функция $f(v)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $dN(v)/N$ из общего числа N молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$.

□ Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{Nd\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon / (kT)},$$

где функция $f(\varepsilon)$ распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул $dN(\varepsilon)/N$ из общего числа N молекул, которые имеют кинетические энергии $\varepsilon = m_0 v^2 / 2$, заключенные в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$.

□ Барометрическая формула

$$p_h = p_0 e^{-Mg(h-h_0)/(RT)},$$

где p_h и p_0 — давление газа на высоте h и h_0 .

□ Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)} = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)}, \text{ или } n = n_0 e^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 — концентрация молекул на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0 gh$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

□ Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул.

□ Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

□ Закон теплопроводности Фурье

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S t,$$

где Q — теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадь S за время t ; dT/dx — градиент температуры; λ — теплопроводность:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ — плотность газа; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул.

□ Закон диффузии Фика

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} S t,$$

где M — масса вещества, переносимая посредством диффузии через площадь S за время t ; $d\rho/dx$ — градиент плотности, D — диффузия:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

□ Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S,$$

где F — сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S ; dv/dx — градиент скорости; η — динамическая вязкость:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

2.2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

□ Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

□ Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i — сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы ($i = n_{\text{пост.}} + n_{\text{вращ.}} + 2n_{\text{колеб.}}$).

□ Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT,$$

где ν — количество вещества, m — масса газа; M — молярная масса газа; R — молярная газовая постоянная.

□ Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q — количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU — изменение ее внутренней энергии; A — работа системы против внешних сил.

□ Первое начало термодинамики для малого изменения системы

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

□ Связь между молярной c_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM,$$

где M — молярная масса газа.

□ Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

□ Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

□ Изменение внутренней энергии идеального газа

$$dU = \frac{m}{M}C_V dT.$$

□ Работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$dA = p dV.$$

□ Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

где V_1 и V_2 — соответственно начальный и конечный объемы газа.

□ Работа газа:

◆ при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1), \text{ или } A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1);$$

◆ при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M}RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \text{ или } A = \frac{m}{M}RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

□ Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = C_p / C_V = (i+2)/i$ — показатель адиабаты.

□ Работа в случае адиабатического процесса

$$A = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2),$$

или

$$A = \frac{RT_1}{\gamma-1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$$

где T_1 , T_2 и V_1 , V_2 — соответственно начальные и конечные температура и объем газа.

□ Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное системой; Q_2 — количество теплоты, отданное системой; A — работа, совершаемая за цикл.

□ Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

□ Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}.$$

2.3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

□ Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса) для моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

где V_m — молярный объем; a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов.

□ Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{v} - b\right) = RT, \text{ или } \left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right)(V - vb) = RT,$$

где $v = m/M$ — количество вещества.

□ Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p' = a / V_m^2.$$

□ Связь критических параметров — объема, давления и температуры — с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса

$$V_k = 3b, \quad p_k = a / (27b^2), \quad T_k = 8a / (27Rb).$$

□ Внутренняя энергия реального газа

$$U = v(C_V T - a / V_m),$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

□ Энтальпия системы

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2,$$

где индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям системы.

□ Поверхностное натяжение

$$\sigma = F / l, \text{ или } \sigma = \Delta E / \Delta S,$$

где F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l , ограничивающий поверхность жидкости; ΔE — поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки.

$$\Delta p = \sigma(1 / R_1 + 1 / R_2),$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск). В случае сферической поверхности

$$\Delta p = 2\sigma / R.$$

□ Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r},$$

где θ — краевой угол; r — радиус капилляра; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

□ Закон Дюлонга и Пти

$$C_V = 3R,$$

где C_V — молярная (атомная) теплоемкость химически простых твердых тел.

□ Уравнение Клапейрона-Клаузиуса, позволяющее определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)},$$

где L — теплота фазового перехода; $(V_2 - V_1)$ — изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T — температура перехода (процесс изотермический).

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

□ Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1| |Q_2|}{r^2},$$

где F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2 в вакууме; r — расстояние между зарядами; ϵ_0 — электрическая постоянная, равная $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

□ Напряженность и потенциал электростатического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0; \quad \varphi = \Pi/Q_0 \quad \text{или} \quad \varphi = A_\infty/Q_0,$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0 , помещенный в данную точку поля; Π — потенциальная энергия заряда Q_0 ; A_∞ — работа перемещения заряда из данной точки поля за его пределы.

□ Напряженность и потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r},$$

□ Поток вектора напряженности через площадку

$$d\Phi_E = E dS = E_n dS$$

где $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к площадке; E_n — составляющая вектора $\mathbf{E}$ по направлению нормали к площадке.

□ Поток вектора напряженности через произвольную поверхность S

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_S E_n dS.$$

□ Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i; \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

где $\mathbf{E}_i$, φ_i — соответственно напряженность и потенциал поля, создаваемого зарядом.

□ Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей.

□ В случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией,

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

□ Электрический момент диполя (дипольный момент)

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ — плечо диполя.

□ Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

$$\tau = \frac{dQ}{dl}; \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}; \quad \rho = \frac{dQ}{dV},$$

т.е. соответственно заряд, приходящийся на единицу длины, поверхности и объема.

□ Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная; $\sum_{i=1}^n Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S ; n — число зарядов; ρ — объемная плотность зарядов.

□ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью

$$E = \sigma/(2\epsilon_0)$$

□ Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями

$$E = \sigma/\epsilon_0$$

□ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра сферы

$$E = 0 \quad \text{при} \quad r < R \quad (\text{внутри сферы});$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{при} \quad r \geq R \quad (\text{вне сферы}).$$

□ Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра шара

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \quad \text{при} \quad r \leq R \quad (\text{внутри шара});$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{при} \quad r \geq R \quad (\text{вне шара}).$$

□ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра,

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри цилиндра);}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \text{ при } r \geq R \text{ (вне цилиндра).}$$

□ Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_L E_i d\mathbf{l} = 0,$$

где E_i — проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление элементарного перемещения $d\mathbf{l}$. Интегрирование производится по любому замкнутому пути L .

□ Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ или } A_{12} = Q_0 \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = Q_0 \int_1^2 E_i d\mathbf{l},$$

где E_i — проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление элементарного перемещения $d\mathbf{l}$.

□ Поляризованность

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i / V,$$

где V — объем диэлектрика; $\mathbf{p}_i$ — дипольный момент i -й молекулы.

□ Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

где χ — диэлектрическая восприимчивость вещества.

□ Связь диэлектрической проницаемости ϵ с диэлектрической восприимчивостью χ :

$$\epsilon = 1 + \chi.$$

□ Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля

$$E = E_0 - P/\epsilon_0, \text{ или } E = E_0/\epsilon.$$

□ Связь между векторами электрического смещения и напряженностью электростатического поля

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}.$$

□ Связь между $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

□ Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i,$$

где $\sum_{i=1}^n Q_i$ — алгебраическая сумма заключенных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов; D_n — составляющая вектора $\mathbf{D}$ по направлению нормали к площадке — вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к площадке. Интегрирование ведется по всей поверхности.

□ Напряженность электростатического поля у поверхности проводника

$$E = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon),$$

где σ — поверхностная плотность зарядов.

□ Емкость уединенного проводника

$$C = Q / \varphi,$$

где Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника.

□ Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0 \epsilon S / d,$$

где S — площадь каждой пластины конденсатора; d — расстояние между пластинами.

□ Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(r_2/r_1)},$$

где l — длина обкладок конденсатора; r_1, r_2 — радиусы полых коаксиальных цилиндров.

□ Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 — радиусы концентрических сфер.

□ Емкость системы конденсаторов при последовательном и параллельном соединении

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \text{ и } C = \sum_{i=1}^n C_i,$$

где C_i — емкость i -го конденсатора; n — число конденсаторов.

□ Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

□ Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд Q_i всеми зарядами, кроме i -го.

□ Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд конденсатора; C — его емкость; $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками.

□ Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2 S}{2}.$$

□ Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0\epsilon S U^2}{2} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} V,$$

где S — площадь одной пластины; U — разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ — объем конденсатора.

□ Объемная плотность энергии

$$w = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

где D — электрическое смещение.

3.2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

□ Сила и плотность электрического тока

$$I = \frac{dQ}{dt}; \quad j = \frac{I}{S},$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

□ Плотность тока в проводнике

$$\mathbf{j} = ne\langle \mathbf{v} \rangle,$$

где $\langle \mathbf{v} \rangle$ — скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n — концентрация зарядов.

□ Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$E = A / Q_0 \quad \text{или} \quad E = \oint \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l},$$

где Q_0 — единичный положительный заряд; A — работа сторонних сил; $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил.

□ Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электрическая проводимость γ вещества проводника

$$R = \rho l / S; \quad G = 1 / R; \quad \gamma = 1 / \rho,$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление; S — площадь поперечного сечения проводника; l — его длина.

□ Сопротивление проводников при последовательном и параллельном соединении

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \quad \text{и} \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i},$$

где R_i — сопротивление i -го проводника; n — число проводников.

□ Зависимость удельного сопротивления ρ от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где α — температурный коэффициент сопротивления.

□ Закон Ома:

◆ для однородного участка цепи

$$I = U / R;$$

◆ для неоднородного участка цепи

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}) / R;$$

◆ для замкнутой цепи

$$I = E / R,$$

где U — напряжение на участке цепи; R — сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов на концах участка цепи; E_{12} — э.д.с. источников тока, входящих в участок; E — э.д.с. всех источников тока цепи.

□ Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электростатического поля.

□ Работа тока за время t

$$A = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t.$$

□ Мощность тока

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

□ Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2 R t = IUt,$$

где Q — количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t .

□ Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$\varpi = jE = \gamma E^2,$$

где ϖ — удельная тепловая мощность тока.

□ Правило Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0; \quad \sum_i I_i R_i = \sum_k E_k.$$

3.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В МЕТАЛЛАХ, В ВАКУУМЕ И ГАЗАХ

□ Контактная разность потенциалов на границе двух металлов 1 и 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2},$$

где A_1, A_2 — работы выходов свободных электронов из металлов; k — постоянная Больцмана;
 n_1, n_2 — концентрации свободных электронов в металлах.

□ Термоэлектродвижущая сила

$$E = \frac{k}{e} (T_1 - T_2) \ln \frac{n_1}{n_2},$$

где $(T_1 - T_2)$ — разность температур спаев.

□ Формула Ричардсона-Дешмана

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-A/(kT)},$$

где $j_{\text{нас}}$ — плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии; C — постоянная, теоретически
одинаковая для всех металлов; A — работа выхода электрона из металла.

3.4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

□ Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; $\mathbf{p}_m$ — магнитный момент контура с током:

$$\mathbf{p}_m = I \mathbf{S} \mathbf{n},$$

где S — площадь контура с током; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура.

□ Связь магнитной индукции $\mathbf{B}$ и напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды.

□ Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^2},$$

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины $d\mathbf{l}$ проводника с током I ; $\mathbf{r}$ —
радиус-вектор, проведенный от $d\mathbf{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция.

□ Модуль вектора $d\mathbf{B}$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Id \sin \alpha}{r^2},$$

где α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

□ Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i,$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция результирующего поля; $\mathbf{B}_i$ — магнитные индукции складываемых полей.

□ Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R},$$

где R — расстояние от оси проводника.

□ Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R},$$

где R — радиус кривизны проводника.

□ Закон Ампера

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}],$$

где $d\mathbf{F}$ — сила, действующая на элемент длины $d\mathbf{l}$ проводника с током I , помещенный в магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$.

□ Модуль силы Ампера

$$dF = IBl \sin \alpha,$$

где α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$.

□ Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl,$$

где R — расстояние между проводниками; dl — отрезок проводника.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\mathbf{v} \mathbf{r}]}{r^3},$$

где r — радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения.

□ Модуль магнитной индукции

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$.

□ Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v} \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на заряд Q , движущийся в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$.

□ Формула Лоренца

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{F}$ — результирующая сила, действующая на движущийся заряд Q , если на него действует электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$ и магнитное поле индукцией $\mathbf{B}$.

□ Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R \frac{IB}{d},$$

где B — магнитная индукция; I — сила тока; d — толщина пластинки; $R = 1/(en)$ — постоянная Холла (n — концентрация электронов).

□ Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\mathbf{B}$)

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B_i d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k,$$

где μ_0 — магнитная постоянная; $d\mathbf{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура; $B_i = B \cos \alpha$ — составляющая вектора $\mathbf{B}$ в направлении касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); угол между векторами $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$; $\sum_{k=1}^n I_k$ — алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром.

□ Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B = \mu_0 NI / l,$$

где l — длина соленоида.

□ Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 NI / 2\pi r.$$

□ Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через площадку dS

$$d\Phi_B = \mathbf{B}d\mathbf{S} = B_n dS,$$

где $d\mathbf{S} = dS_n$ — вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью n к площадке; B_n — проекция вектора $\mathbf{B}$ на направление нормали к площадке.

□ Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = \int_S B_n dS.$$

□ Потокосцепление (полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида)

$$\Phi = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S,$$

где μ — магнитная проницаемость среды.

□ Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$dA = I d\Phi,$$

где $d\Phi$ — магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.

□ Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$dA = I d\Phi',$$

где $d\Phi'$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

3.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

□ Закон Фарадея

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где E_i — э.д.с. индукции.

□ Э.д.с. индукции, возникающая в рамке площадью S при вращении рамки с угловой скоростью в однородном магнитном поле с индукцией B ,

$$E_i = BS\omega \sin \omega t,$$

где ωt — мгновенное значение угла между вектором $\mathbf{B}$ и вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости рамки.

□ Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L ,

$$\Phi = LI.$$

□ Э.д.с. самоиндукции

$$E_s = -L \frac{dI}{dt},$$

где L — индуктивность контура.

□ Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l},$$

где N — число витков соленоида; l — его длина.

□ Токи при размыкании и при замыкании цепи

$$I = I_0 e^{-t/\tau}; \quad I = I_0 (1 - e^{-t/\tau}),$$

где $\tau = L/R$ — время релаксации (L — индуктивность; R — сопротивление).

- Э.д.с. взаимной индукции (э.д.с., индуцируемая изменением силы тока в соседнем контуре)

$$E = -L_{12} \frac{dI}{dt},$$

где L_{12} — взаимная индуктивность контуров.

- Взаимная индуктивность двух катушек (с числом витков N_1 и N_2 , намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S,$$

где μ_0 — магнитная проницаемость сердечника; l — длина сердечника по средней линии; S — площадь сердечника.

- Коэффициент трансформации

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{I_1}{I_2},$$

где N , E , I — соответственно число витков, э.д.с. и сила тока в обмотках трансформатора.

- Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре, по которому течет ток I ,

$$W = LI^2 / 2.$$

- Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

3.6. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

- Связь орбитального магнитного $\mathbf{p}_m$ и орбитального механического $\mathbf{L}_e$ моментов электрона

$$\mathbf{p}_m = -g\mathbf{L}_e = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}_e,$$

где $g = e/(2m)$ — гиромагнитное отношение орбитальных моментов.

- Намагниченность

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}_m / V = \sum \mathbf{p}_a / V,$$

где $\mathbf{P}_m = \sum \mathbf{p}_a$ — магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

- Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества.

- Связь между векторами $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}),$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

- Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества

$$\mu = 1 + \chi.$$

- Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\mathbf{B}$)

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B_l d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I'),$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l — составляющая вектора $\mathbf{B}$ в направлении касательной контура L произвольной формы; I и I' — соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным контуром.

□ Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

где I — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L .

3.7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

□ Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

где $\mathbf{D}$ — электрическое смещение; $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ — плотность тока смещения в вакууме; $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ — плотность тока поляризации.

□ Полная система уравнений Максвелла:

♦ в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}; & \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV; \\ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}; & \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned}$$

♦ в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \text{div } \mathbf{D} &= \rho; \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$; $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ (ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; (ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости; γ — удельная проводимость вещества).

IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

□ Уравнение гармонических колебаний

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где s — смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$ — круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ — частота; T — период колебаний; φ_0 — начальная фаза.

□ Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 s.$$

- Кинетическая энергия колеблющейся точки массой m

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

- Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Полная энергия

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

- Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где k — коэффициент упругости ($k = \omega_0^2 m$).

- Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},$$

где m — масса пружинного маятника; k — жесткость пружины.

- Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g},$$

где J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/(ml)$ — приведенная длина физического маятника; g — ускорение свободного падения.

- Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где l — длина маятника.

- Формула Томсона, устанавливающая связь между периодом T собственных колебаний в контуре без активного сопротивления и индуктивностью L и емкостью контура C ,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

- Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его решение:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0; \quad Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура.

- Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где A_1 и A_2 — амплитуды складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 — их начальные фазы.

□ Начальная фаза результирующего колебания

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

□ Период биений

$$T = 2\pi / \Delta\omega.$$

□ Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{2xy}{AB} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi.$$

где A и B — амплитуды складываемых колебаний; φ — разность фаз обоих колебаний.

□ Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы и его решение:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0; \quad s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где s — колеблющаяся величина, описывающая физический процесс; δ — коэффициент затухания ($\delta = r/(2m)$ в случае механических колебаний и $\delta = R/(2L)$ в случае электромагнитных колебаний); ω_0 — циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — частота затухающих колебаний; $A_0 e^{-\delta t}$ — амплитуда затухающих колебаний.

□ Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

□ Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где $\tau = 1/\delta$ — время релаксации; N — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

□ Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t; \quad s = A \cos(\omega t - \varphi),$$

где s — колеблющаяся величина, описывающая физический процесс ($x_0 = F_0 / m$ в случае механических колебаний, $x_0 = U_m / L$ в случае электромагнитных колебаний);

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2 \omega^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

□ Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad A_{\text{рез.}} = \frac{x_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

□ Полное сопротивление Z цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R , катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C , на концы которой подается переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2},$$

где $R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = 1/(\omega C)$ — реактивное емкостное сопротивление.

□ Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

□ Действующие (эффективные) значения тока и напряжения

$$I = I_m / \sqrt{2}; \quad U = U_m / \sqrt{2},$$

□ Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi,$$

где

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

4.2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

□ Связь длины волны λ , периода T колебаний и частоты ν :

$$\lambda = \nu T; \quad \nu = \lambda \nu,$$

где ν — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

□ Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x ,

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $\xi(x, t)$ — смещение точек среды с координатой x в момент времени t ; A — амплитуда волны; ω — циклическая (круговая) частота; $k = 2\pi / \lambda = 2\pi / (\nu T) = \omega / \nu$ — волновое число (λ — длина волны; ν — фазовая скорость; T — период колебаний); φ_0 — начальная фаза колебаний.

□ Связь между разностью фаз $\Delta\varphi$ и разностью хода Δ

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}.$$

□ Условия максимума и минимума амплитуды при интерференции волн

$$\Delta_{\max} = \pm 2m \frac{\lambda}{2}; \quad \Delta_{\min} = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

□ Фазовая v и групповая u скорости, а также связь между ними

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}; \quad u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

□ Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t = 2A \cos kx \cos \omega t$$

□ Координаты пучностей и узлов

$$x_{\text{п}} = \pm m \frac{\lambda}{2}; \quad x_{\text{н}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

□ Уровень интенсивности звука (Б)

$$L = \lg(I / I_0),$$

где I — интенсивность звука; I_0 — интенсивность звука на пороге слышимости ($I_0 = 1 \text{ пВт/м}^2$).

□ Скорость распространения звуковых волн в газах

$$v = \sqrt{\gamma R T / M},$$

где R — молярная газовая постоянная; M — молярная масса; $\gamma = C_p / C_v$ — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме; T — термодинамическая температура.

□ Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{\text{пр.}}) \nu_0}{v \mp v_{\text{ист.}}},$$

где ν — частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 — частота звука, посылаемая источником; $v_{\text{пр.}}$ — скорость движения приемника; $v_{\text{ист.}}$ — скорость движения источника; v — скорость распространения звука. Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления.

4.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

□ Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ — скорость распространения света в вакууме; ϵ_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ϵ и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

□ Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H,$$

где E и H — соответственно мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны.

□ Уравнения плоской электромагнитной волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω — круговая частота; $k = \omega/v$ — волновое число; φ — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

□ Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

V. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

□ Законы отражения и преломления света

$$i'_1 = i_1; \quad \sin i_1 / \sin i_2 = n_{21},$$

где i_1 — угол падения; i'_1 — угол отражения; i_2 — угол преломления; $n_{21} = n_2 / n_1$ — относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй среды.

□ Предельный угол полного отражения при распространении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную

$$\sin i_{\text{пр.}} = n_2 / n_1 = n_{21}.$$

□ Преломление на сферической поверхности (для параксиальных лучей)

$$\frac{n_2}{b} - \frac{n_1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

где R — радиус сферической поверхности; n_1 и n_2 — показатели преломления сред по разные стороны сферической поверхности; a — расстояние от точки, лежащей на оптической оси сферической поверхности, до преломляющей поверхности; b — расстояние от поверхности до изображения. В формуле $R > 0$ — для выпуклой поверхности, $R < 0$ — для вогнутой.

□ Формула сферического зеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b — соответственно расстояния от полюса зеркала до предмета и изображения; f — фокусное расстояние зеркала; R — радиус кривизны зеркала.

□ Оптическая сила тонкой линзы

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где f — фокусное расстояние линзы; $N = n/n_1$ — относительный показатель преломления (n и n_1 — соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей ($R > 0$ для выпуклой поверхности; $R < 0$ для вогнутой); a и b — соответственно расстояния от оптического центра линзы до предмета и изображения.

□ Сила излучения

$$I_e = \Phi_e / \omega,$$

где Φ_e — поток излучения источника; ω — телесный угол, в пределах которого это излучение распространяется.

□ Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником,

$$\Phi_0 = 4\pi I,$$

где I — сила света источника.

□ Светимость поверхности

$$R = \Phi/S,$$

где Φ — световой поток, испускаемый поверхностью; S — площадь этой поверхности.

□ Яркость B , светящейся поверхности в некотором направлении φ

$$B_\varphi = I / (S \cos \varphi),$$

где I — сила света; S — площадь поверхности; φ — угол между нормалью к элементу поверхности и направлением наблюдения.

□ Освещенность E поверхности

$$E = \Phi / S,$$

где Φ — световой поток, падающий на поверхность; S — площадь этой поверхности.

□ Связь светимости R и яркости B при условии, что яркость не зависит от направления,

$$R = \pi B.$$

5.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

□ Скорость света в среде

$$v = c / n,$$

где c — скорость света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды.

□ Разность фаз двух когерентных волн

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

где $L = sn$ — оптическая длина пути (s — геометрическая длина пути световой волны в среде; n — показатель преломления этой среды); $\Delta = L_2 - L_1$ — оптическая разность хода двух световых волн; λ_0 — длина волны в вакууме.

□ Условие интерференционных максимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

□ Условие интерференционных минимумов

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

□ Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0,$$

где d — расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, при условии $l \gg d$.

□ Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе ($n_0 = 1$),

$$\begin{aligned} 2dn \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} &= 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ 2dn \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} &= 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где d — толщина пленки; n — ее показатель преломления; i — угол падения; r — угол преломления. В общем случае член $\pm \lambda_0 / 2$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если $n > n_0$, то необходимо употреблять знак плюс, если $n < n_0$ — знак минус.

□ Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{(m - 1/2) \lambda_0 R}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где m — номер кольца; R — радиус кривизны линзы.

$$r_m^* = \sqrt{m \lambda_0 R}, \quad m = 1, 2, \dots$$

□ В случае "просветления оптики" интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n = \sqrt{n_c},$$

где n_c — показатель преломления стекла; n — показатель преломления пленки.

5.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

□ Радиус внешней границы m -й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda},$$

где m — номер зоны Френеля; λ — длина волны, a и b — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

□ Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально:

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где a — ширина щели; φ — угол дифракции; m — порядок спектра; λ — длина волны.

□ Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$d \sin \varphi = \pm 2m' \frac{\lambda}{N}, \quad m' = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{ кроме } 0, N, 2N, \dots,$$

где d — период дифракционной решетки; N — число штрихов решетки.

□ Период дифракционной решетки

$$d = 1 / N_0,$$

где N_0 — число щелей, приходящихся на единицу длины решетки.

□ Условие дифракционных максимумов от пространственной решетки (формула Вульфа-Брэггов)

$$2d \sin \vartheta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения.

□ Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}.$$

□ Наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек могут быть разрешены в фокальной плоскости объектива,

$$\varphi \geq 1,22\lambda / D.$$

где D — диаметр объектива; λ — длина волны света.

□ Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN,$$

где $\lambda, (\lambda + \delta \lambda)$ — длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; m — порядок спектра; N — общее число штрихов решетки.

5.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

□ Связь угла φ отклонения лучей призмой и преломляющего угла A призмы

$$\varphi = A(n - 1),$$

где n — показатель преломления призмы.

□ Связь между показателем преломления и диэлектрической проницаемостью вещества

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

□ Уравнение вынужденных колебаний оптического электрона под действием электрической составляющей поля волны (простейшая задача дисперсии)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} \cos \omega t,$$

где eE_0 — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны; ω_0 — собственная частота колебаний электрона; ω — частота внешнего поля; m — масса электрона.

□ Зависимость показателя преломления вещества n от частоты ω внешнего поля, согласно элементарной электронной теории дисперсии,

$$n^2 = 1 + \frac{n_{0i}}{\varepsilon_0} \sum \frac{e^2 / m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

где ε_0 — электрическая постоянная; n_{0i} — концентрация электронов с собственной частотой ω_{0i} ; m — масса электрона; e — заряд электрона.

□ Закон ослабления света в веществе (закон Бугера)

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где I_0 и I — интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x ; α — коэффициент поглощения.

□ Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v / c) \cos \vartheta},$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника электромагнитного излучения относительно приемника; c — скорость света в вакууме; ϑ — угол между вектором скорости $\mathbf{V}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

□ Поперечный эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме ($\vartheta = \pi / 2$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

□ Эффект Вавилова-Черенкова

$$\cos \vartheta = c / (nv),$$

где ϑ — угол между направлением распространения излучения и вектором скорости частицы; n — показатель преломления среды.

5.5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

□ Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$, и $I_{\min}$ — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

□ Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где I — интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α — угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

□ Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

где i_B — угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} — относительный показатель преломления.

□ Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на пути l в ячейке Керра

$$\Delta = l(n_o - n_e) = klE^2,$$

где n_o , n_e — показатели преломления соответственно обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси; E — напряженность электрического поля; k — постоянная.

□ Оптическая разность хода для пластинки в четверть волны

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm(m + 1/4)\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным; λ_0 — длина волны в вакууме.

□ Угол поворота плоскости поляризации:

◆ для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d;$$

◆ для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha] C d,$$

где d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $\alpha_0[\alpha]$ — удельное вращение; C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

5.6. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

□ Закон Стефана-Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где R_e — энергетическая светимость (излучательность) черного тела; σ — постоянная Стефана-Больцмана; T — термодинамическая температура.

□ Связь энергетической светимости R_e и спектральной плотности энергетической светимости $r_{\nu,T}$ ($r_{\lambda,T}$) черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T} d\lambda.$$

□ Энергетическая светимость серого тела

$$R_T^e = A_T \sigma T^4,$$

где A_T — поглощательная способность серого тела.

□ Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = b/T,$$

где $\lambda_{\max}$ — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела; b — постоянная Вина.

□ Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры

$$(r_{\lambda,T}) = C T^5,$$

где $C = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

□ Формула Рэлея-Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где k — постоянная Планка.

□ Энергия кванта

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc / \lambda.$$

□ Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1},$$

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{h\nu}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1}.$$

□ Связь радиационной T_p и истинной T температур

$$T_p = \sqrt[4]{A_T} T,$$

где A_T — поглощательная способность серого тела.

□ Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$\varepsilon = h\nu = A + T_{\max},$$

где $\varepsilon = h\nu$ — энергия фотона, падающего на поверхность металла; A — работа выхода электрона из металла; $T_{\max} = mv_{\max}^2 / 2$, — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

□ "Красная граница" фотоэффекта для данного металла

$$\nu_0 = A / h; \quad \lambda_0 = hc / A,$$

где λ_0 — максимальная длина волны излучения (ν_0 — соответственно минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен.

□ Масса и импульс фотона

$$m_\gamma = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}; \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c},$$

где $h\nu$ — энергия фотона.

$$\rho = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho),$$

где $E_e = Nh\nu$ — облученность поверхности (энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени); ρ — коэффициент отражения; w — объемная плотность энергии излучения.

□ Изменение длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\vartheta}{2},$$

где λ и λ' — длины волн падающего и рассеянного излучения; m_0 — масса электрона; ϑ — угол рассеяния; $\lambda_c = h / (m_0 c)$ — комптоновская длина волны.

VI. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ, МОЛЕКУЛ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

6.1. ТЕОРИЯ АТОМОВ ВОДОРОДА ПО БОРУ

□ Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре водорода,

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где ν — частота спектральных линий в спектре атома водорода; R — постоянная Ридберга; m определяет серию ($m = 1, 2, 3, \dots$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, \dots$): $m = 1$ (серия Лаймана), $m = 2$ (серия Бальмера), $m = 3$ (серия Пашена), $m = 4$ (серия Брэкета), $m = 5$ (серия Пфунда), $m = 6$ (серия Хэмфри).

□ Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e v r_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где m_e — масса электрона; v — скорость электрона по n -й орбите радиусом r_n .

□ Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m,$$

где E_n и E_m — соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

□ Энергия электрона на n -й стационарной орбите

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где Z — порядковый номер элемента в системе Менделеева; ϵ_0 — электрическая постоянная.

6.2. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

□ Связь дебройлевской волны частицы с импульсом p

$$\lambda = h / p = h / (mv),$$

где m — масса частицы; v — ее скорость.

□ Фазовая скорость свободно движущейся со скоростью v частицы массой m

$$v_{\text{фаз.}} = \omega / k = E / p = c^2 / v,$$

где $E = \hbar\omega$ — энергия частицы (ω — круговая частота); $p = \hbar k$ — импульс ($k = 2\pi / \lambda$ — волновое число).

□ Групповая скорость свободно движущейся частицы

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}.$$

□ Соотношения неопределенностей:

◆ для координаты и импульса частицы

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar,$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar,$$

где Δx , Δy , Δz — неопределенности координат; Δp_x , Δp_y , Δp_z — неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси координат;

◆ для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния;

Δt — время пребывания

системы в данном состоянии.

□ Вероятность нахождения частицы в объеме dV

$$dW = \Psi \Psi^* dV = |\Psi|^2 dV,$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; Ψ^* — функция, комплексно сопряженная с Ψ ; $|\Psi|^2 = \Psi \Psi^*$ — квадрат модуля волновой функции;

◆ для стационарных состояний

$$dW = \psi \psi^* dV = |\psi|^2 dV,$$

где $\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная (амплитудная) часть волновой функции.

□ Условие нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1,$$

где интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т.е. по координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$.

□ Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

□ Среднее значение физической величины L , характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ ,

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L |\Psi|^2 dV.$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar = h/(2\pi)$; m — масса частицы; Δ — оператор Лапласа $\left(\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $U = U(x, y, z, t)$ — потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется.

□ Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

где $\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная часть волновой функции ($\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i(E/\hbar)t}$); $U = U(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы; E — полная энергия частицы.

□ Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$\Psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)},$$

где A — амплитуда волн де Бройля; $p_x = \hbar k$ — импульс частицы; $E = \hbar \omega$ — энергия частицы.

□ Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n -м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной "потенциальной яме" с бесконечно высокими "стенками",

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где l — ширина ямы.

□ Собственная волновая функция, соответствующая вышеприведенному собственному значению энергии,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

□ Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l ,

$$D = D_0 \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} l \right],$$

где D_0 — множитель, который можно приравнять единице; U — высота потенциального барьера; E — энергия частицы.

□ Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора в квантовой механике

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0,$$

где $m\omega_0^2 x^2 / 2 = U$ — потенциальная энергия осциллятора; ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора; m — масса частицы.

□ Собственные значения энергии гармонического осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

□ Энергия нулевых колебаний гармонического осциллятора

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0.$$

6.3. ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

□ Потенциальная энергия $U(r)$ взаимодействия электрона с ядром в водородоподобном атоме

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r — расстояние между электроном и ядром; Z — порядковый номер элемента; ϵ_0 — электрическая постоянная.

□ Собственное значение энергии E_n электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

□ Энергия ионизации атома водорода

$$E_i = -E_1 = \frac{m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2}.$$

□ Момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

где l — орбитальное квантовое число, принимающее при заданном n следующие значения: $l = 0, 1, \dots, n-1$ (всего n значений).

□ Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l,$$

где m_l — магнитное квантовое число, принимающее при заданном l следующие значения: $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ (всего $(2l+1)$ значений).

□ Правила отбора для орбитального и магнитного квантовых чисел

$$\Delta l = \pm 1 \quad \text{и} \quad \Delta m_l = 0, \pm 1.$$

□ Нормированная волновая функция, отвечающая $1s$ -состоянию (основному состоянию) электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a},$$

где $a = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m e^2)$ — величина, совпадающая с первым боровским радиусом.

□ Вероятность обнаружить электрон в атоме водорода, находящемся в $1s$ -состоянии, в интервале от r до $r + dr$

$$dW = |\psi_{100}|^2 dV = |\psi_{100}|^2 4\pi r^2 dr.$$

□ Спин (собственный механический момент импульса) электрона

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

где s — спиновое квантовое число ($s = 1/2$).

□ Проекция спина на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

где m_s — магнитное спиновое квантовое число ($m_s = \pm 1/2$).

□ Принцип Паули

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где $Z(n, l, m_l, m_s)$ — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел: n — главного, l — орбитального, m_l — магнитного, m_s — магнитного спинового.

□ Максимальное число электронов $Z(n)$, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом n ,

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

□ Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = ch / (eU),$$

где e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке.

□ Закон Мозли, определяющий частоты спектральных линий характеристического рентгеновского излучения,

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где R — постоянная Ридберга, Z — порядковый номер элемента в периодической системе; σ — постоянная экранирования; m определяет рентгеновскую серию ($m = 1, 2, 3, \dots$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, \dots$).

□ Закон Мозли для линии K_α ($\sigma = 1$)

$$\nu = R(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

6.4. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

□ Распределение Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/(kT)} - 1} \text{ и } \langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/(kT)} + 1},$$

где $\langle N_i \rangle$ — соответственно средние числа бозонов и фермионов в квантовом состоянии с энергией E_i ; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; μ — химический потенциал. При $e^{(E_i - \mu)/(kT)} \gg 1$ оба распределения переходят в классическое распределение Максвелла-Больцмана $\langle N_i \rangle = A e^{-E_i/(kT)}$, где $A = e^{\mu/(kT)}$.

□ Распределение Ферми-Дирака по энергиям для свободных электронов в металле

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E - E_F)/(kT)} + 1},$$

где E_F — энергия Ферми.

♦ При $T = 0$ К

$$\langle N(E) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } E < E_F, \\ 0 & \text{при } E > E_F. \end{cases}$$

□ Характеристическая температура Дебая (при $T \ll T_D$)

$$T_D = \hbar \omega_D / k,$$

□ Электрическая проводимость металла, согласно квантовой теории электропроводности металлов,

$$\gamma = \frac{ne^2 \langle l_F \rangle}{m \langle u_F \rangle},$$

где n — концентрация электронов проводимости в металле; $\langle l_F \rangle$ — средняя длина свободного пробега электрона, имеющего энергию Ферми; $\langle u_F \rangle$ — средняя скорость теплового движения такого электрона.

6.5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

$$n_e = C_1 e^{-(E_2 - E_F)/(kT)} \text{ и } n_p = C_2 e^{-(E_1 - E_F)/(kT)},$$

где E_2 — энергия, соответствующая дну зоны проводимости; E_1 — энергия, соответствующая верхней границе валентной зоны; E_F — энергия Ферми; T — термодинамическая температура; C_1 и C_2 — постоянные, зависящие от температуры и эффективных масс электронов проводимости и дырок (при равенстве последних $C_1 = C_2$).

□ Уровень Ферми в собственном полупроводнике

$$E_F = \Delta E / 2.$$

где ΔE — ширина запрещенной зоны.

□ Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)},$$

где γ_0 — постоянная, характерная для данного полупроводника.

VII. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

□ Радиус ядра

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где $R_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$ м; A — массовое число (число нуклонов в ядре).

□ Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{сб}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2 = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2,$$

где m_p , m_n , $m_{\text{я}}$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число ядра (число протонов в ядре); A — массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$, масса атома водорода (${}^1_1\text{H}$); m — масса атома.

□ Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n] - m.$$

□ Удельная энергия связи (энергия связи, отнесенная к одному нук- лону)

$$\delta E_{\text{сб}} = E_{\text{сб}} / A.$$

□ Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + dt$,

$$dN = -\lambda N dt,$$

где N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t ; λ — постоянная радиоактивного распада.

□ Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N — число нераспавшихся ядер в момент времени t ; N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ — постоянная радиоактивного распада.

□ Число ядер, распавшихся за время t ,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$

□ Связь периода полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного рас- пада λ

$$T_{1/2} = (\ln 2) / \lambda.$$

□ Связь среднего времени жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

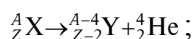
$$\tau = 1 / \lambda.$$

□ Активность нуклида

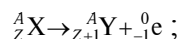
$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N.$$

□ Правила смещения:

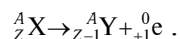
♦ для α -распада



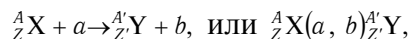
♦ для β^- -распада



♦ для β^+ -распада



□ Символическая запись ядерной реакции



где ${}_Z^AX$ и ${}_{Z'}^{A'}Y$ — исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A' , a и b — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

□ Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2 [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)],$$

где m_1 и m_2 — массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ — суммы масс покоя ядер продуктов реакции. Если $Q > 0$ — экзотермическая реакция, $Q < 0$ — эндотермическая реакция.

□ Энергия ядерной реакции представляется также в виде

$$Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4),$$

где T_1 , T_2 , T_3 , T_4 — соответственно кинетические энергии ядра-мишени, бомбардирующей частицы, испускаемой частицы и ядра продукта реакции.

□ Скорость нарастания цепной реакции

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}, \text{ откуда } N = N_0 e^{(k-1)t/T},$$

где N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; N — число нейтронов в момент времени t ; T — среднее время жизни одного поколения; k — коэффициент размножения нейтронов.

Приложения

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с ²
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Постоянная Фарадея	F	$96,48 \cdot 10^3$ Кл/моль
Молярная газовая	R	8,31 Дж/(моль

постоянная		
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Скорость света в вакууме	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная закона смещения Вина	b	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	h $\hbar = h/2\pi$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	R	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радиус Бора	a	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Масса покоя электрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона	m_n	$1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя α -частицы	m_α	$6,6425 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Отношение массы протона к массе электрона	m_p/m_e	1836,15
Элементарный заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Отношение заряда электрона к его массе	e/m_e	$1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Комптоновская длина волны электрона	λ	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 эВ)
Магнетон Бора	μ_B	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	μ_0	$12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

Единицы и размерности физических величин в СИ

Величина		Единица		Выражение через основные и дополнительные единицы
наименование	размерность	наименование	обозначение	
Основные единицы				
Длина	L	метр	м	
Масса	M	килограмм	кг	
Время	T	секунда	с	

Сила электрического тока	I	ампер	А	
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К	
Количество вещества	N	моль	моль	
Сила света	J	кандела	кд	
Дополнительные единицы				
Плоский угол	—	радиан	рад	
Телесный угол	—	стерадиан	ср	
Производные единицы				
Частота	T^{-1}	герц	Гц	c^{-1}
Сила, вес	LMT^{-2}	ньютон	Н	$м \cdot кг \cdot c^{-2}$
Давление, механическое напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	$м^{-1} \cdot кг \cdot c^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	$м^2 \cdot кг \cdot c^{-2}$
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	$м^2 \cdot кг \cdot c^{-3}$
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	$c \cdot A$
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	$м^2 \cdot кг \cdot c^{-3} \cdot A^{-1}$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot c^4 \cdot A^2$
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	$м^2 \cdot кг \cdot c^{-3} \cdot A^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot c^3 \cdot A^2$
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	$м^2 \cdot кг \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	$кг \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	$м^2 \cdot кг \cdot c^{-2} \cdot A^{-2}$
Световой поток	J	люмен	лм	кд · ср
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	$м^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активность изотопа (активность нуклида в радиоактивном источнике)	T^{-1}	беккерель	Бк	c^{-1}

Поглощенная доза излучения	$L^{-2}T^{-2}$	грей	Гр	$m^2 \cdot c^{-2}$
-------------------------------	----------------	------	----	--------------------

**Множители и приставки для образования
десятичных кратных и дольных единиц**

Множи- тель	Прис- тавка	Обозначение приставки		Множи- тель	Прис- тавка	Обозначение приставки	
		между- народн ое	русско е			между- народн ое	русско е
10^{-18}	атто	a	а	10^1	дека	da	да
10^{-15}	фемт о	f	ф	10^2	гекто	h	г
10^{-12}	пико	p	п	10^3	кило	k	к
10^{-9}	нано	n	н	10^6	мега	M	М
10^{-6}	микр о	μ	мк	10^9	гига	G	Г
10^{-3}	милл и	m	м	10^{12}	тера	T	Т
10^{-2}	санти	c	с	10^{15}	пета	P	П
10^{-1}	деци	d	д	10^{18}	экса	E	Э

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пи
Ε, ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ, ϑ	тета	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА	5
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА	10
ФИЗИКА	16
I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ	16
1.1. Элементы кинематики	16
1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела	17
1.3. Работа и энергия	18
1.4. Механика твердого тела	20
1.5. Тяготение. Элементы теории поля	22
1.6. Элементы механики жидкостей	24
1.7. Элементы специальной (частной) теории относительности	25
II. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ	27
2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов	27
2.2. Основы термодинамики	30
2.3. Реальные газы, жидкости и твердые тела	32
III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	34
3.1. Электростатика	34
3.2. Постоянный электрический ток	38
3.3. Электрические токи в металлах, в вакууме и газах	40
3.4. Магнитное поле	41
3.5. Электромагнитная индукция	44
3.6. Магнитные свойства вещества	45
3.7. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля	46
IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	47
4.1. Механические и электромагнитные колебания	47
4.2. Упругие волны	50
4.3. Электромагнитные волны	52
V. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ	53
5.1. Элементы геометрической и электронной оптики	53
5.2. Интерференция света	54
5.3. Дифракция света	56
5.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом	57
5.5. Поляризация света	58

5.6. Квантовая природа излучения	59
VI. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ,	МОЛЕКУЛ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ
.....	61
6.1. Теория атомов водорода по Бору	61
6.2. Элементы квантовой механики	61
6.3. Элементы современной физики атомов и молекул	64
6.4. Элементы квантовой статистики	66
6.5. Элементы физики твердого тела	67
VII. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА	68
7.1. Элементы физики атомного ядра	68
ПРИЛОЖЕНИЯ	70